ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Αναπλ. Καθηγητής Ι. Κ. Πουρναρας

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Παρασκευή 1 Φεβρουαρίου 2019, 9-12 μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

← Β-23 Λύσεις

1. Δίνεται η εξίσωση

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{*}$$

όπου $a_0, a_1, a_2 \in C(I, \mathbb{R})$ και I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας.

i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα υποβιβασμού τάξης για την (*).

iia) Αν y_1, y_2 είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (*) με $y_1(x) \neq 0, x \in I$, να εξετασθεί αν η συνάρτηση $z(x) = [\frac{y_2(x)}{y_1(x)}]', x \in I$ είναι μια λύση της εξίσωσης δεύτερης τάξης στην οποία υποβιβάζεται η (*) με χρήση της λύσης y_1.

iib) Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της (*) αν είναι γνωστές δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. Υποβιβάζω την (*) σε δεύτερης τάξης με την βοήθεια της y_1 και έπειτα την τάξη αυτής σε 1ης τάξης με τη βοήθεια της Z

2. i) Να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad x \in [1, e], \quad y(1) = 0 = y(e).$$ ← Λυμένο π.χ.

ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^e sin(2019\pi logx)sin(k\pi logx)dx,$$ ← $=0$ ιδιοσυναρτήσεις από διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις άρα ορθογώνιες ως προς την $r(x)=1$

όπου k είναι ο αριθμός μητρώου σας, και να διατυπωθούν με σαφήνεια οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

3. i) Για μια γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση n-τάξης (E_n^0) με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I είναι γνωστό ότι υπάρχει σύνολο λύσεων $\{y_1, ..., y_n\}$ με $W(y_1, ..., y_n)(x) = 1, x \in I$.

ia) Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα Wronski οποιουδήποτε συνόλου λύσεων της (E_n^0) είναι σταθερή συνάρτηση στο I. ⇝ $W(S_1)(x) = W(S_1)(x_0) / W(y_1,..,y_n)(x_0) \cdot W(y_1,..,y_n)(x)$
↑ τυχαίο σύνολο λύσεων — σταθερή

ib) Να εξετασθεί αν υπάρχει βασικό σύνολο $\{z_1, ..., z_n\}$ της (E_n^0) με $W(z_1, ..., z_n)(x) = 2019, x \in I$. → Θεώρημα ύπαρξης ΒΣΛ για κατάλληλες αρχικές συνθήκες

ii) Να επιλυθεί η εξίσωση ← ΛΥΜΕΝΕΣ

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 1 + x, \quad x > -1,$$

με $p, q \in C(-1, +\infty)$ και δεδομένων ότι υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς με σταθερή ορίζουσα Wronski και ότι μια λύση της ομογενούς είναι η συνάρτηση $y_1(x) = (1 + x)^2, x > -1$.

4. Να δοθεί απάντηση σε ένα από τα ερωτήματα.

A) Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

Χαρακτ. πολυώνυμο

$$y''(x) + 2ay'(x) + by(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0,$$

όπου $a > 0, b > a^2$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y της εξίσωσης ισχύει

και $y_u(x) = \sum_{k=1}^{2} y_k(x) \int_0^x \frac{W_k(t)}{W(t)} t \cdot e^{-t} dt$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} y'(x).$$

ΤΥΠΟΣ LIEBNITZ

B) Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

A-21 Λύσεις

$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$

$$y'(x) + log(\frac{9 + cosx}{2})y(x) = \frac{2sinx}{(x+1)^2}, \quad x \geq 0,$$

$q(x) \geq \mu, \ \forall x \geq 0$

τείνει προς το μηδέν για $x \to +\infty$.

Αρκ. $y(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

5. Να δοθεί απάντηση σε δυο από τα επόμενα ερωτήματα

i) Να αποδειχθεί ότι το π.α.τ έχει ακριβώς μια λύση στο I:

$$y'(x) = \frac{cosy}{1 - x^2}, \quad y(0) = -2, \quad I = (-1, 1),$$

Θ.3 Έστω J σ... $\subseteq I$ K-Lipschitz στο $E_J = \{(x,y): x \in J, y: ...\}$

ii) Να αποδειχθεί ότι το π.α.τ έχει ακριβώς μια λύση στο I:

$$y'(x) = \frac{1}{4}(1 + cos4x)y - \frac{1}{800}(1 - cos4x)y^2, \quad y(0) = 100, \quad I = [-1, 1].$$

$R = \{(x,y) / |x| \leq 1, |y - 100| \leq \beta\}$ $\forall \beta > 0$ (Θ1)

και να διατυπωθούν οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

iii) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

Θ.1

$$y'(x) = \frac{ye^{xy} + 2x}{2y - xe^{xy}}, \quad y(0) = 2.$$

(πλήρης $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$)

6. Να βρεθεί μια λύση y_1 της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

c-8

$$x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0,$$

$y_1 = |x|^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = |x|^3 e^{-x}$ $x \neq 0$.

$\lim_{x \to \pm\infty} y_1(x) \overset{DLH}{=} 0$

γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ και να εξετασθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Να περιγραφεί μια λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη της y_1.

Περ. 3 (Θεωρ. κανονικών ανωμάλων)

ΝΑ ΔΟΘΟΥΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ 5 ΘΕΜΑΤΑ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ